CH6 : APPLICATIONS LINEAIRES

6.1 DEFINITIONS ET EXEMPLES

Def 6.1 • Soient V et V' deux espaces vectoriels sur k corps $\mathbb{K}$. Une application $f : V \to V'$ est appelé une application linéaire ou une transformation linéaire ou un (homo)morphisme d'E.V. $\Leftrightarrow$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V$, on a $f(\lambda \vec{v} + \mu \vec{w}) = \lambda f(\vec{v}) + \mu f(\vec{w})$

• Soit $f : V \to V'$ une application linéaire. Alors,

1. f est un monomorphisme $\Leftrightarrow$ f est injectif
2. f est un épimorphisme $\Leftrightarrow$ f est surjectif
3. f est un isomorphisme $\Leftrightarrow$ f est bijectif

• Si $\exists$ une isomorphisme entre V et V', on dit que V et V' sont isomorphe et on note : $V \cong V'$

• Une app. linéaire de V dans V est appelé un opérateur linéaire / endomorphisme. Un isomorphisme $f : V \to V$ est un automorphisme. On note $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V')$ l'ensemble des app. linéaires de V dans V' et $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ l'ensemble des endomorphismes de V et $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(V)$ l'ensemble des automorphismes de V

Ex 6.2 (4)? 6.5.3
6.3.3 6.6.4,5
6.4.5,6,7

Le 6.7 Soient V et V' deux espaces vectoriel sur $\mathbb{K}$. Pour une application $f : V \to V'$ les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est une application linéaire
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ et $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V$, $f(\lambda \vec{v}) = \lambda f(\vec{v})$ et $f(\vec{v} + \vec{w}) = f(\vec{v}) + f(\vec{w})$
3. $\forall$ # fini de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in V$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, nous avons

$$f(\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n) = \lambda_1 f(\vec{v}_1) + \dots + \lambda_n f(\vec{v}_n)$$

Le 6.8 Soit $f : V \to V'$ une A.L. Alors les propriétés suivantes sont satisfaites :

1. $f(0_V) = 0_{V'}$
2. $f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})$

PROPRIÉTÉS DES APPLICATIONS LINÉAIRES

(Rappel : $\forall$ espace vectoriel V et $\forall$ ensemble A, l'ensemble V^A de toutes les applications de A dans V est un E.V.)

Pro 6.9 Soit V et V' des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. L'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V')$ des applications linéaires de V dans V' est un S.E.V. de V'^V, l'E.V. de toutes les applications (pas d'office linéaire) de V dans V'.

$$V'^V = \{f : V \to V'\} \supset \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V')$$

[DEMO] Il faut montrer qu'une combili d'A.L. est de nouveau une A.L. i.e. $\forall f,g \in \mathrm{Hom}(V,V')$ et $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$, $\forall \vec{v},\vec{\omega} \in V$ et $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}(\alpha f+\beta g)(\lambda\vec{v}+\mu\vec{\omega}) &= \alpha f(\lambda\vec{v}+\mu\vec{\omega}) + \beta g(\lambda\vec{v}+\mu\vec{\omega})\\ &= \alpha\lambda f(\vec{v}) + \alpha\mu f(\vec{\omega}) + \beta\lambda g(\vec{v}) + \beta\mu g(\vec{\omega})\\ &= \lambda(\alpha f(\vec{v})+\beta g(\vec{v})) + \mu(\alpha f(\vec{\omega})+\beta g(\vec{\omega}))\\ &= \lambda(\alpha f+\beta g)(\vec{v}) + \mu(\alpha f+\beta g)(\vec{\omega})\end{aligned}$$

On voit alors le combili de 2 A.L. est une A.L.

Pro 6.10 Une application linéaire $f : V \to V'$ est complètement déterminé par l'image d'une base $\mathcal{B} = \{\vec{e_i} \mid i \in I\}$ de V. C'est à dire qu'il y a une bijection entre $\mathrm{Ens}(\mathcal{B},V')$ des app. de $\mathcal{B}$ dans V' et $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V')$. De plus, il y a l'isomorphisme suivant :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V') \cong V'^{\mathcal{B}}$$

DEMO Définissons $\phi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V') \to V'^{\mathcal{B}}$. Donc $\forall$ app. lin. $f : V \to V'$, on a $\underbrace{\phi(f)}_{\text{restriction de } f \text{ à la base } \mathcal{B}} : \mathcal{B} \to V' : \vec{e} \mapsto \phi(f)(\vec{e}) = f(\vec{e}) \quad \forall \vec{e} \in \mathcal{B}$.

→ Il faut vérifier que ϕ est une app. lin $\Leftrightarrow \phi(\lambda f+\mu g) = \lambda\phi(f) + \mu\phi(g)$

On peut évaluer ces app. en $\vec{e}$ élément qcq de $\mathcal{B}$. → trivial

→ Montrons la bijectivité ⇒ $\exists$ inverse : $\psi : V'^{\mathcal{B}} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V')$

Soit $g : \mathcal{B} \to V'$ une application, et $\psi(g) : V \to V'$ app. linéaire

Alors $\psi(g)(\vec{v}) = \psi(g)\left(\sum_{\vec{b}\in\mathcal{B}} \lambda_{\vec{b}}\vec{b}\right) = \sum_{\vec{b}\in\mathcal{B}} \lambda_{\vec{b}}\, \psi(g)(\vec{b}) \to g(\vec{b})$

On voit alors que $(\psi \circ \phi) = \mathrm{id}$ et $(\phi \circ \psi) = \mathrm{id}$, et comme ϕ est une application linéaire, c'est un isomorphisme.

Pro 6.11 Soient V, V' et V'' des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$. Soient $f : V \to V'$ et $g : V' \to V''$ des app. lin. Alors $g \circ f : V \to V''$ est une application linéaire.

DEMO Soit $\vec{v}, \vec{w} \in V$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors on a :

$$g \circ f(\lambda \vec{v} + \mu \vec{w}) = g(f(\lambda \vec{v} + \mu \vec{w})) = g(\lambda f(\vec{v}) + \mu f(\vec{w}))$$
$$= \lambda g(f(\vec{v})) + \mu g(f(\vec{w})) = \lambda g \circ f(\vec{v}) + \mu (g \circ f(\vec{w}))$$

pro 6.11* Soient V, V' des E.V sur $\mathbb{K}$ et soit $f : V \to V'$ application linéaire et bijectiv. Alors $\exists f^{-1} : V' \to V$ tq $f^{-1} \circ f = id_V$ et $f \circ f^{-1} = id_{V'}$ et f^{-1} est linéaire

DEMO
$$f^{-1}(\lambda \vec{v}'_{\in V'} + \mu \vec{w}'_{\in V'}) = f^{-1}(\lambda (\underbrace{f \circ f^{-1}}_{id_{V'}}(\vec{v}')) + \mu (\underbrace{f \circ f^{-1}}_{id_{V'}}(\vec{w}')))$$

car f linéaire $= \underbrace{f^{-1} \circ f}_{id_V}(\lambda f^{-1}(\vec{v}') + \mu f^{-1}(\vec{w}))$

$$= \lambda f^{-1}(\vec{v}') + \mu f^{-1}(\vec{w})$$

6.3 NOYAU ET IMAGE

Def 6.12 Soient V et V' des E.V sur $\mathbb{K}$ et $f : V \to V'$ une app. linéaire.

① Le noyeau de f est l'ensemble de tout les vecteurs de V qui sont envoyés sur $0_{V'}$: $\mathrm{Ker}\, f = \{\vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = 0_W\} \subset V$

② L'image de f est l'ensemble de tout les vecteurs de V' qui sont l'image d'un vecteur de V sous f : $\mathrm{Im}\, f = \{f(\vec{v}) \mid \vec{v} \in V\} \subset V'$

Pro 6.14 Soient V et V' des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et $f : V \to V'$ une app. lin.

① $\forall$ sous-espace $W \subset V$, l'image directe de W : $f(W) = \{f(\vec{w}) \mid \vec{w} \in W\}$ est un sous-espace de V'. En particulier, $\mathrm{Im}\, f$ est un sous espace de V'

② $\forall$ sous-espace $W' \subset V'$, l'image inverse de W' est un sous-espace de V : $f^{-1}(W) = \{\vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) \in W'\}$. En particulier, $\mathrm{Ker}\, f$ est un sous espace de V

DEMO $\boxed{1}$ Soient $f(\vec{w}), f(\vec{w}') \in f(W)$ (donc $\vec{w}, \vec{w}' \in W$) et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Alors, $\lambda f(\vec{w}) + \mu f(\vec{w}) \overset{f \text{ linéaire}}{=} f(\lambda \vec{w} + \mu \vec{w}') \in f(W)$

$\boxed{2}$ Soit $\vec{v}, \vec{v}' \in f^{-1}(W') \iff f(\vec{v}), f(\vec{v}') \in W'$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$f(\lambda \vec{v} + \mu \vec{v}') \overset{f \text{ linéaire}}{=} \lambda f(\vec{v}) + \mu (\vec{v}') \in W' \Rightarrow f^{-1}(W)$ sous-espace

Th 6.14 Soient V et V' des E.V. sur $\mathbb{K}$, et $f : V \to V'$ une isomorphisme.
Alors $f^{-1} : V' \to V$ est de nouveau une app. linéaire.

DEMO Soit $v', w' \in V'$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. $f^{-1}(\lambda v' + \mu w') =$ car $f \circ f^{-1} = Id_{V'}$

$f^{-1}(\lambda\, f \circ f^{-1}(v') + \mu\, f \circ f^{-1}(w'))$ car f linéaire

$= \underbrace{f^{-1} \circ f}_{f^{-1} \circ f = Id_V}(\lambda f^{-1}(v') + \mu f^{-1}(w')) = \lambda f^{-1}(v') + \mu f^{-1}(w')$

Le 6.15 V, V' E.V. sur $\mathbb{K}$ et $f : V \to V'$ une app. linéaire. Soit des sous-espaces $W \subset V$, $W' \subset V'$ tq $Im f \subset W'$

① L'application $f|_W : W \to V'$ définie comme $f|_W(w) = f(w)$ $\forall w \in W$ est de nouveau une app. linéaire appelée la restriction de f à W.

② L'application $f|^{W'}$ définie comme $f|^{W'}(v) = f(v)$ $\forall v \in V$ est de nouveau une app. linéaire, appelée la corestriction de f à W'.

Le 6.16 Soit $f : V \to V'$ une app. lin. et $G \subset V$ une génératrice de V.
Alors $f(G)$ est une partie génératrice de $Im f$: $Vect(f(G)) = Im f$

DEMO Soit $f(v) \in Im f$. Comme G génératrice et $\vec{v} \in V$,
on a $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ pour $v_i \in G$ et $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Alors
$f(v) = f(\sum \lambda_i v_i) \underset{f.\, lin.}{=} \sum \lambda_i f(v_i)$ donc $f(v) \in Vect(f(G))$

Pro 6.17 Soient V et V' des E.V. sur $\mathbb{K}$ et $f : V \to V'$ app. lin. Les assertions suivantes sont équivalentes :

① f est un monomorphisme (i.e. injectif) $\Leftrightarrow$

② $Ker f = 0_V$ $\Leftrightarrow$

③ $dim(Ker f) = 0$ $\Leftrightarrow$

④ Pour $L \subset V$ libre, $f(L) = L' \subset V'$ est libre $\Leftrightarrow$

⑤ Pour $B \subset V$ base, $f(B)$ est libre $\Leftrightarrow$

⑥ Pour $B \subset V$ base, $f(B)$ est une base de $Im f$ $\Leftrightarrow$
$Vect(f(B)) = Im f$

⑦ $\exists f'$ linéaire tq $f' \circ f = id_V$ $\Leftrightarrow$

⑧ Par corestriction $f : V \to Im f$ isomorphisme $\Leftrightarrow$

DEMO

① ⇒ ② $v \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(v) = 0_{V'} = f(0_V)$. Alors par injectivité $\Rightarrow v = 0_V \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{0_V\}$

② ⇔ ③ L'espace 0 est le seul espace de dim. 0.

③ ⇒ ④ Prenons L partie libre. Alors $f(L) = \{f(v) \mid v \in L\}$.

Mq $f(L)$ libre $\Rightarrow \sum_i^n \lambda_i f(v_i) = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = 0$.

Or, $\sum \lambda_i f(v_i) \underset{f.\text{lin}}{=} f(\underbrace{\sum \lambda_i v_i}_{\in \operatorname{Ker} f}) = 0$. Alors $\sum \lambda_i v_i \in \operatorname{Ker} f$

$\Rightarrow \sum \lambda_i v_i = 0_V \underset{L \text{ libre}}{\Leftrightarrow} \lambda_i = 0$ Donc $f(L)$ libre.

④ ⇒ ⑤ Une base étant libre, $f(B)$ est libre (par ④).

⑤ ⇒ ⑥ $f(B)$ est libre par ⑤ et génératrice par 6.16

⑥ ⇒ ⑦ Soit B base de $V \underset{(6)}{\Rightarrow} f(B)$ base de $\operatorname{Im} f \subset V'$

Alors je peux compléter B pour avoir une base de V'.

Soit $B' = f(B) \cup B''$ avec $B'' \subset V' \setminus \operatorname{Im} f$

Définissons alors $f' : V' \to V$ tq

$f(v) \longrightarrow v \quad \forall v \in B$

$f(\omega) \longrightarrow 0_V \quad \forall \omega \in B''$.

Alors $\forall b \in B$, $f' \circ f(b) = b \Rightarrow f' \circ f = \mathrm{Id}_V$

⑦ ⇒ ⑧ On a

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, shift left, "f"] & \operatorname{Im} f \arrow[l, shift left, "f^{-1}"] \arrow[d, phantom, "\cap"] \\ & V' \arrow[ul, "f'(7)"] \end{tikzcd}$$

Regardons donc $\underbrace{f \circ f^{-1}}_{\mathrm{Id}_{\operatorname{Im} f}}(f(v)) = f(v)$

⑧ ⇒ ① Soit $v, w \in V$ tq $f(v) = f(w) \in \operatorname{Im} f$

Alors $f^{-1} \circ f(v) = f^{-1} \circ f(w)$ car $f : V \to \operatorname{Im} f$ isomorphe

$\Rightarrow v = w$ et donc f est injective

Pro 6.18 Soit V, V' des E.V. sur $\mathbb{K}$ et $f : V \to V'$ une app. lin. Les assertions suivantes sont equivalentes :

① f est un épimorphisme (i.e. surjectif) ⇔

② $\operatorname{Im} f = V'$ ⇔

③ $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim(V')$ ⇔

④ Pour $G \subset V$ génératrice, $\operatorname{Vect}(f(G)) = V'$ ⇔

⑤ Pour $B \subset V$ base de V, $\mathrm{Vect}(f(B)) = V'$

⑥ $\exists f' : V' \to V$ app. linéaire tq $f \circ f' = id_{V'}$

DEMO

① ⇔ ② par définition

② ⇔ ③ Comme $\mathrm{Im} f \subset V'$, alors $\mathrm{Im} f = V' \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im} f) = \dim V'$

③ → ④ $\forall$ app. linéaire, si $\mathrm{Vect}\, G = V \Rightarrow \mathrm{Vect}(f(G)) = \mathrm{Im} f$

Comme $\mathrm{Im} f = V'$, $f(G)$ génère V'

④ → ⑤ Base ⇒ génératrice donc par ④ $\langle f(B) \rangle = V'$

⑤ → ⑥ Définissons $f' : V' \to V$:

soit $B \subset V$ base $\longrightarrow f(B) \subset V'$ et $\langle f(B) \rangle = V'$

Alors soit $B' \subset f(B) \subset V'$. (Donc B' est une image d'éléments de B)

Alors on peut définir $f' : B' = \{f(\vec{v})\} \longmapsto \vec{v}$ $\forall f(\vec{v}) \in B'$

Donc $f \circ f'(\vec{v}') = f(\vec{v}) = \vec{v}'$. Donc $f \circ f' = id_{V'}$

⑥ → ① On sait $\forall \vec{v}' \in V' \xrightarrow{f'} V \ni f'(\vec{v}')$

Et $f(\underbrace{f'(\vec{v}')}_{\in V}) = f \circ f'(\vec{v}') = \vec{v}'$

Donc tout vecteur $\vec{v}'$ a un antécédent $f'(\vec{v}')$

Pro 6.19 Soient V, V' des E.V. sur $\mathbb{K}$, $f : V \to V'$ une app. lin. alors :

① f est un isomorphisme (ie. bijectif) $\Longleftrightarrow$

② pour $B \subset V$ base, $f(B) \subset V'$ base : $\langle f(B) \rangle = V'$ et $f(B)$ libre $\Longleftrightarrow$

③ $\exists f^{-1} : V' \to V$ tq $f \circ f^{-1} = id_{V'}$ et $f^{-1} \circ f = id_V$ $\Longleftrightarrow$

④ $\mathrm{Ker} f = 0$ et $\mathrm{Im} f = V'$ $\Longleftrightarrow$

DEMO Comme un isomorphisme est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme, on peut appliquer 6.17 et 6.18

Th. 6.20 <u>2e théorème de la dimension</u> Soient V, V' des E.V <u>finidimensionnels</u> sur $\mathbb{K}$ et $f : V \to V'$ une app. lin. Alors

$$\dim V = \dim(\mathrm{Ker} f) + \dim(\mathrm{Im} f)$$

DEMO ① Soit $E = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m\}$ base de $\mathrm{Ker} f$. ⇒ $\dim \mathrm{Ker} f = m$

⇒ E partie libre de V. Aggrandissons E pour avoir une base de V : $\overline{E} = \{\underbrace{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m}_{\in \mathrm{Ker} f}, \vec{e}_{m+1}, \dots, \vec{e}_n\}$. ⇒ $\dim V = n$

Il faut donc montrer que $\dim(\mathrm{Im} f) = n - m$ avec $m \leq n$

donc une base de $\mathrm{Im} f$ avec $n-m$ éléments

Prenons $E' = \{ f(\vec{e}_{m+1}), \dots, f(\vec{e}_n) \} \subset \operatorname{Im} f$

→ Soit $\vec{v} \in V$, alors $\vec{v} = \sum^n \lambda_i \vec{e}_i$ et $f(\vec{v}) = f(\sum^n \lambda_i \vec{e}_i)$

$$f(\vec{v}) = \sum^n \lambda_i f(\vec{e}_i) = \underbrace{f(\lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_m \vec{e}_m)}_{=\vec{0}} + f(\lambda_{m+1} \vec{e}_{m+1} + \dots + \lambda_n \vec{e}_n)$$

$$= \sum_{m+1}^{n} \lambda_i f(\vec{e}_i)$$

Donc $\langle E' \rangle = \operatorname{Im} f$

→ Regardons $\lambda_1 f(\vec{e}_{m+1}) + \dots + \lambda_{n-m} f(\vec{e}_n) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ $f(\underbrace{\lambda_1 \vec{e}_{m+1} + \dots + \lambda_{n-m} \vec{e}_n}_{\notin \operatorname{Ker} f = \langle E \rangle}) = \vec{0}$

? $\Leftrightarrow$ $\underset{n-m}{\langle E \rangle \neq} \langle f(E) \rangle$ $\Leftrightarrow$ $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-m} = 0$

Donc E' est une base de $\operatorname{Im} f \Rightarrow \dim(\operatorname{Im} f) = n-m$

Co. 6.21 Soient V, V' des E.V. finidimensionels sur $\mathbb{K}$ et $f: V \to V'$ une application linéaire.

1. Si f est un monomorphisme, alors $\dim V \leq V'$
2. f épimorphisme $\Rightarrow$ $\dim V \geq \dim V'$
3. f isomorphisme $\Rightarrow$ $\dim V = \dim V'$

DEMO 1. f monom. $\overset{6.17}{\Rightarrow} \operatorname{Ker} f = 0_V \Rightarrow \dim(\operatorname{Ker} f) = 0 \overset{6.20}{\Rightarrow} \dim V = \dim(\operatorname{Im} f)$

Alors comme $\operatorname{Im} f \subset V'$, $\dim(\operatorname{Im} f) \leq \dim(V')$

2. f épim. $\Rightarrow \operatorname{Im} f = V' \Rightarrow \dim V = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim V'$.

Comme $\dim(\operatorname{Ker} f) \geq 0$, $\dim V' \leq \dim V$

Co 6.22 Soient V, V' des E.V. finidimensionnels sur $\mathbb{K}$ et $f: V \to V'$ une app. lin. De plus, $\dim V = \dim(V') = n$. Alors,

1. f est un monomorphisme ($\dim(\operatorname{Ker} f) = 0$) $\Longleftrightarrow$
2. f est un épimorphisme ($\dim(\operatorname{Im} f) = n$) $\Longleftrightarrow$
3. f est un isomorphisme $\Longleftrightarrow$

→ le corollaire 6.22 ne fonctionne que pour des E.V. finidimensionel. En effet, si on prend $f: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ tq $f(P(x)) = \frac{dP}{dx}(x)$, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}[x]$ (f surj.) mais $\operatorname{Ker} f = \{ P(x) \mid \dim(x) \leq 1 \}$ (f pas inj.)

6.4. COORDONNEES, PRODUITS ET COPRODUITS REVISITÉS

Th 6.24 Propriété universelle du produit direct : Soit $(V_i)_{i\in I}$ une famille d'espace vectoriels sur $\mathbb{K}$ et soit $V = \prod_{i\in I} V_i$ le produit direct de cette famille. Alors $\forall j \in I$, il y a un épimorphisme $\pi_j : V \to V_j$; $\pi_j((\vec{v}_i)_{i\in I}) = \vec{v}_j$ appelé projection sur la j-ème composante

$V = \prod_{i\in I} V_i = \{(\vec{v}_i)_{i\in I} / \vec{v}_i \in V_i\}$

- Pour tout E.V. T et toute famille d'app. lin. $(T_j : T \to V_j)_{j\in I}$, $\exists !$ une app. lin. $u : T \to V$ tq $T_j = \pi_j \circ u \ \forall j \in I$.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[rr, dashed, "\exists ! u"] \arrow[dr, "\forall T_j"'] & & \prod_{i\in I} V_i \arrow[dl, "\pi_j"] \\
& V_j &
\end{tikzcd}$$

DEMO

① Montrons que les app. lin. π_j sont $\mathbb{K}$ linéaires et surjectif *exercice*

② Soient $(T, (T_j)_{j\in I})$, $u : T \to V$ tq $T_j = \pi_j \circ u \ \forall j \in I$.

Prenons $\vec{t}$ quelconque, alors $u(\vec{t}) = (\vec{v}_i)_{i\in I}$. Alors $\forall j \in I$, on a

$\vec{v}_j = \pi_j((\vec{v}_i)_{i\in I}) = \pi_j \circ u(\vec{t}) = T_j(\vec{t})$. c'est à dire

$u : T \to V$ est donné par $u(\vec{t}) = (T_i(\vec{t}))_{i\in I} \ \forall \vec{t} \in T$

③ Réciproquement, il faut vérifier que u est tjs une app. linéaire.

Th. 6.25 Propriété universelle du coproduit. Soit $(V_i)_{i\in I}$ une famille d'E.V. sur un corps $\mathbb{K}$ et soit $V = \coprod_{i\in I} V_i$ le coproduit de cette famille. Alors $\forall j \in I$, il y a un monomorphisme $\iota_j : V_j \to V$, $\iota_j(\vec{v}) = (\vec{v}_i)_{i\in I}$, avec $\vec{v}_j = \vec{v}$ et $\vec{v}_i = \vec{0} \ \forall i \neq j$.

De plus, $\forall\ T$ un E.V. et toute famille d'app. lin. $(\theta_j : V_j \to T)_{j\in I}$, $\exists !$ app. linéaire $u : V \to T$, tq $\theta_j = u \circ \iota_j$

$$\begin{tikzcd}
& V_j \arrow[dl, "\forall \theta_j"'] \arrow[dr, "\iota_j"] & \\
T & & \prod_{i\in I} V_i \arrow[ll, dashed, "\exists ! u"']
\end{tikzcd}$$

DEMO

- Soit $\vec{v} = (\vec{v}_j)_{j\in I} \in V$, $u(\vec{v}) = \sum_{\substack{j\in I \\ \text{finie}}} \theta_j(\vec{v}_j)$
- La suite est en exercice

6.26 Soit V un E.V. sur $\mathbb{K}$ avec une base $\mathcal{B}$. Supposons que pour tout $\vec{b} \in \mathcal{B}$ l'E.V. $\text{Vect}(\vec{b}) \cong \mathbb{K}$. Alors V est isomorphe au coproduit de la famille $(\text{Vect}(\vec{b}))_{\vec{b} \in \mathcal{B}}$, donc $V \cong \coprod_{\mathcal{B}} \mathbb{K}$

- Si V est finidimensionnel avec $\dim V = n$, alors $V \cong \mathbb{K}^n$

DEMO Soit $\vec{v}$ un vecteur de V, par (5.14) $\exists!\ (\lambda_{\vec{b}})_{\vec{b} \in \mathcal{B}}$ avec $\lambda_{\vec{b}} \in \mathbb{K}$ et $\vec{v} = \sum_{\vec{b} \in \mathcal{B}} \lambda_{\vec{b}} \vec{b}$. Alors $V \to \coprod_{\vec{b} \in \mathcal{B}} \text{Vect}(\vec{b}),\ \vec{v} \mapsto (\lambda_{\vec{b}} \vec{b})_{\vec{b} \in \mathcal{B}}$ est bijectif.

⊙ On voit que l'application linéaire $V \to \coprod_{\mathcal{B}} \mathbb{K}$ envoi $\vec{v} \to (\lambda_{\vec{b}})_{\vec{b} \in \mathcal{B}}$
$\vec{v} = \sum_{\vec{b} \in \mathcal{B}} \lambda_{\vec{b}} \vec{b}$

Co 6.27 Soient V et V' des E.V. finidimensionnels sur $\mathbb{K}$.
Alors $V \cong V' \iff \dim V = \dim V'$

DEMO $\Rightarrow$ Supposons $\exists$ isomorphisme $f : V \to V'$, alors par (6.19), $f(\mathcal{B})$ est une base de V'. Alors $\dim V = \dim V'$

$\Leftarrow$ Si $n = \dim V = \dim V'$, par (6.26) $V \cong \mathbb{K}^n \cong V'$

Co 6.28 Soient V et V' deux E.V. finidimensionnels, alors $\dim(V \times V') = \dim V + \dim V'$

DEMO Soit $\dim V = n$, $\dim V' = m$. Alors $V \cong \mathbb{K}^n$, $V' \cong \mathbb{K}^m$.
Donc $V \times V' \cong \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m \cong \mathbb{K}^{n+m}$

⊙ Pour W, W' sous-E.V de V, on défini leur somme comme
$W + W' = \{\vec{w} + \vec{w}' \mid \vec{w} \in W, \vec{w}' \in W'\} \subset V$
→ Remarquons que $W + W' = \text{Vect}(W \cup W')$

Pro 6.29 Soit V un E.V. sur $\mathbb{K}$ et W, W' des sous-E de V. Alors
$\dim(W + W') + \dim(W \cap W') = \dim W + \dim W'$

DEMO Soit $f : W \times W' \to V$, $f(\vec{w}, \vec{w}') = \vec{w} + \vec{w}'$ $\forall \vec{w} \in W, \vec{w}' \in W'$
Alors $\text{Im} f = W + W'$. De plus, $(\vec{w}, \vec{w}') \in \text{Ker} f \iff f(\vec{w}, \vec{w}') = \vec{w} + \vec{w}' = \vec{0}$
? Donc $\iff \vec{w} = -\vec{w}'$. Alors $\vec{w} \in W \cap W'$, donc $\text{Ker} f \cong W \cap W'$
Alors par (6.20), $\dim W + \dim W' = \dim(W \times W') = \dim \text{Im} f + \dim \text{Ker} f$
$= \dim(W + W') + \dim(W \cap W')$

Co. 6.30 Si $V = W \oplus W' \Rightarrow \dim V = \dim W + \dim W'$

DEMO Comme $W \cap W' = \vec{0}$ et $W + W' = V$, par (6.29) c'est vrai.
→ On savait aussi déjà que $W \oplus W' \cong W \times W'$

6.5 LE GROUPE DES AUTOMORPHISMES

6.31. Soit V un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ et soit l'ensemble $Aut_{\mathbb{K}}(V)$ de tout les automorphisme de V. Alors,

① $\forall f, g \in Aut_{\mathbb{K}}(V)$, $f \circ g \in Aut_{\mathbb{K}}(V)$

② $\forall f, g, h \in Aut_{\mathbb{K}}(V)$, $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

③ $\forall f \in Aut_{\mathbb{K}}(V)$, $id_V \in Aut_{\mathbb{K}}(V)$ et $id_V \circ f = f = f \circ id_V$ $\forall f$.

④ $\forall f \in Aut_{\mathbb{K}}(V)$ $f^{-1} \in Aut_{\mathbb{K}}(V)$ et $f \circ f^{-1} = id_V = f^{-1} \circ f$

Def 6.32. Un groupe est un ensemble G, muni d'un opération interne : $\cdot : G \times G \to G$ qui satisfait les propriétés suivantes:

① $\forall g, h, k \in G$, $(g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k)$ → associativité

② $\exists\, e \in G$ tq $e \cdot g = g = g \cdot e$ $\forall g \in G$ → $\exists$ d'un neutre

③ $\forall g \in G$, $\exists\, g^{-1} \in G$ tq $g \cdot g^{-1} = e = g^{-1} \cdot g$ → $\exists$ d'un inverse

De plus, si $\forall g, h \in G$ $g \cdot h = h \cdot g$, le groupe G est commutatif.

⊙ Soit G, H deux groupes, alors une application $\phi : G \to H$ est appelé un morphisme de groupe si $\phi(g \cdot g') = \phi(g) \cdot \phi(g')$ $\forall g, g' \in G$. Si ϕ est bijectif, ϕ est un isomorphisme et G et H sont des groupes isomorphes.

6.34 Soit V un E.V. et $B = \{\vec{b_i} \mid i \in I\}$ et $B' = \{\vec{b_i}' \mid i \in I\}$ deux base de V. Alors $\exists!\, f \in Aut_{\mathbb{K}}(V)$ tq $f(\vec{b_i}) = \vec{b_i}'$ $\forall i \in I$.

On dit que $Aut_{\mathbb{K}}(V)$ agit strictement transitivement sur ~~des~~ bases ordonnées

6.6. TRANSFORMATIONS AFFINES

Def 6.35 Soient V, V' des E.V. sur $\mathbb{K}$. Une transformation affine de V dans V' est une application $T : V \to V'$ pour laquelle $\exists$ une app. lin. $f \in Hom_{\mathbb{K}}(V, V')$ et un vecteur $\vec{b} \in V'$ tq

$$T(\vec{v}) = f_T(\vec{v}) + \vec{b_T} \quad \forall \vec{v} \in V.$$

→ $T(\vec{v})$ est linéaire $\Leftrightarrow$ $\vec{b_T} = \vec{0}$

Pro 6.36 Soit $T : V \to V'$, $T(\vec{v}) = f_T(\vec{v}) + \vec{b_T}$ une transformation affine, avec $f_T \in Hom_{\mathbb{K}}(V, V')$ et $\vec{b_T} \in V'$

① L'image direct d'une variété linéaire L de V par rapport à T est une variété linéaire de V'.

② L'image inverse d'une variété linéaire L' de V' par rapport à T est une variété linéaire de V.

DEMO

$T^{-1}(L') = \{\vec{v} \in V \mid T(\vec{v}) \in L'\}$

① • Soit $L = \vec{a} + W$ où $\vec{a} \in V$ et W un sous-espace de V.

Alors par (6.14) $f_T(W)$ est un sous-espace de V'. Alors

$$T(L) = f_T(L) + \vec{b_T} = f_T(\vec{a} + W) + \vec{b_T} = \underbrace{f_T(\vec{a}) + \vec{b_T}}_{\vec{a}' \in V'} + \underbrace{f_T(W)}_{W' \subset V'}$$

Donc $T(L)$ est une variété lin. de V'

② • Soit $\vec{a} \in T^{-1}(L')$ i.e. $T(\vec{a}) \in L'$. Alors $L' = \vec{a}' + W'$ avec $\vec{a}' \in V'$ et W' sous espace de V'. Alors $T(\vec{a}) = f_T(\vec{a}) + \vec{b_T} = \vec{a}' + \vec{\omega}'$ pour un certain $\vec{\omega}' \in W'$. Par (6.14), $f_T^{-1}(W')$ est un sous-espace de V.

• Soit $\vec{v} \in T^{-1}(L')$, alors $\exists\, \vec{\omega}'' \in W'$ tq $T(\vec{v}) = f_T(\vec{v}) + \vec{b_T} = \vec{a}' + \vec{\omega}''$

Alors, $f_T(\vec{v} - \vec{a}) = f(\vec{v}) - f(\vec{a}) = \vec{a}' + \vec{\omega}'' - \vec{b_T} - \vec{a} - \vec{\omega}' + \vec{b_T} = \vec{\omega}'' - \vec{\omega}' \in W$.

Donc $\vec{v} - \vec{a} \in f_T^{-1}(W')$ et $\vec{v} \in \vec{a} + f^{-1}(W)$

• $\forall\, \vec{\omega} \in f_T^{-1}(W')$, on a $T(\vec{a} + \vec{\omega}) = f(\vec{a} + \vec{\omega}) + \vec{b_T} = a' + \vec{\omega}' + f_T(\vec{\omega})$

Comme $\vec{\omega}', f(\vec{\omega}) \in W'$, $f(\vec{a} + \vec{\omega}) \in L'$ et donc $\vec{a} + \vec{\omega} \in T^{-1}(L')$ ▨

Co 6.37 Soit $f : V \to V'$ une app. lin. et $\vec{v}' = f(\vec{v}) \in Im f$. Alors l'image inverse de $\vec{v}'$ est une variété linéaire : $f^{-1}(\vec{v}') = \vec{v} + Ker f$.

DEMO

Comme $\{\vec{v}'\} = \vec{v}' + \{\vec{0}\}$ est une var. lin. $\Rightarrow$ transformation affine, par (6.36) $Ker f = f^{-1}(\{\vec{0}\})$ ▨